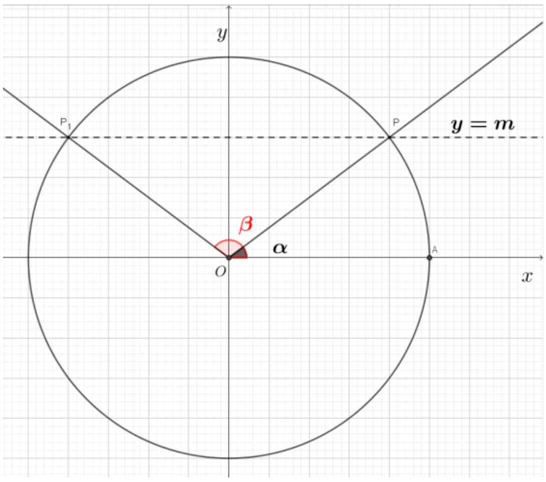
Equazioni e disequazioni trascendenti

Equazioni goniometriche

Equazioni elementari in seno

$\operatorname{sen} x = m$



- Se $-1 \le m \le 1$:

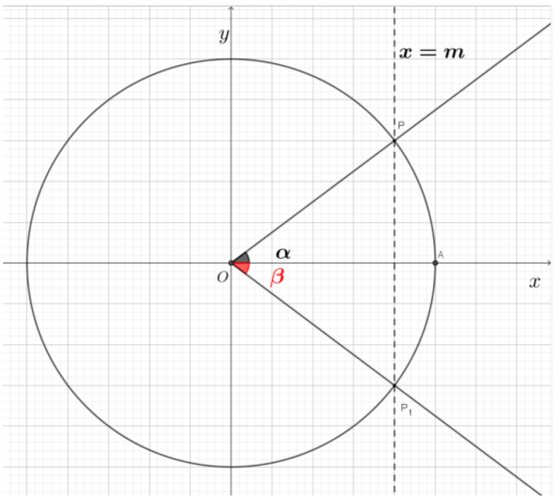
$$x_1 = \alpha + 2k\pi$$
$$x_2 = \beta = \pi - \alpha + 2k\pi$$

con $\begin{cases} \alpha = \operatorname{arcsen} m \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- Se $m < -1 \ \vee \ m > 1$: eq. Impossibile

Equazioni elementari in coseno

$\cos x = m$



- Se $-1 \le m \le 1$:

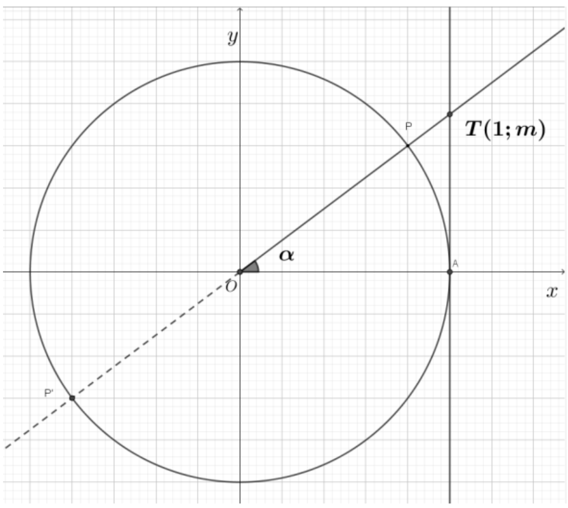
$$x_1 = \alpha + 2k\pi$$
$$x_2 = \beta = -\alpha + 2k\pi$$

con $\begin{cases} \alpha = \arccos m \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- Se $m < -1 \ \vee \ m > 1$: eq. Impossibile

Equazioni elementari in tangente

$\operatorname{tg} x = m$



- $\forall m \in \mathbb{R}$

$$x = \alpha + k\pi$$

con $\begin{cases} \alpha = \operatorname{arctg} m \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Equazioni di 2° in un'unica funzione goniometrica $a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x + c = 0$ $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ $a\,\text{tg}^2 x + b\,\text{tg}\,x + c = 0$	• Porre $\text{sen}\,x = t$ $\quad [\cos x = t; \qquad \text{tg}\,x = t]$ • risolvere l'equazione di 2° grado in t • risolvere le equazioni elementari ottenute
Equazioni lineari in seno e coseno $a\,\text{sen}\,x + b\cos x + c = 0$	**Metodo grafico** Nel sistema $\begin{cases} a\,\text{sen}\,x + b\cos x + c = 0 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$ posto $\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \text{sen}\,x \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ le cui soluzioni sono i punti di intersezione tra la retta e la circonferenza goniometrica, da cui è possibile ricavare la x
	Metodo dell'angolo aggiunto L'equazione data è equivalente alla equazione: $r\,\text{sen}(x+\alpha) + c = 0$ con $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{tg}\,\alpha = \dfrac{b}{a} \end{cases}$
	Metodo della tangente Con la sostituzione: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ con $\quad t = \text{tg}\,\dfrac{x}{2}$
Equazioni omogenee di 1° grado in seno e coseno $a\,\text{sen}\,x + b\cos x = 0$	Dividendo entrambi i termini dell'equazione per $\cos x$ si ottiene l'equazione elementare: $\text{tg}\,x = -\dfrac{b}{a}$
Equazioni particolari contenenti seno e/o coseno di funzioni di x $\text{sen}\,f(x) = \text{sen}\,g(x) \quad \Rightarrow$ $\cos f(x) = \cos g(x) \quad \Rightarrow$ $\text{sen}\,f(x) = \cos g(x) \quad \Rightarrow$	Soluzioni $f(x) = g(x) + 2k\pi \quad \vee \quad f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$ $f(x) = g(x) + 2k\pi \quad \vee \quad f(x) = -g(x) + 2k\pi$ $\cos\left[\dfrac{\pi}{2} - f(x)\right] = \cos g(x)$
Equazioni particolari contenenti tangente e/o cotangente di funzioni di x $\text{tg}\,f(x) = \text{tg}\,g(x) \quad \Rightarrow$ $\text{cotg}\,f(x) = \text{cotg}\,g(x) \quad \Rightarrow$ $\text{tg}\,f(x) = \text{cotg}\,g(x) \quad \Rightarrow$	Soluzioni $f(x) = g(x) + k\pi$ $f(x) = g(x) + k\pi$ $\text{tg}\,f(x) = \text{tg}\left[\dfrac{\pi}{2} - g(x)\right]$

Equazioni omogenee di 2° grado $a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x = 0$ con $a \neq 0$	Soluzioni $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ a\,\text{tg}^2 x + b\,\text{tg}\,x + c = 0\end{cases}$
$b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x = 0$	$\cos x\left(b\,\text{sen}\,x + c\cos x\right) = 0$ cioè: $\cos x = 0 \quad \cup \quad \text{sen}\,x + c\cos x = 0$
Equazioni riconducibili ad equazioni omogenee di 2° grado $a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x = d$	Soluzioni $a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right)$ e l'equazione diventa omogenea

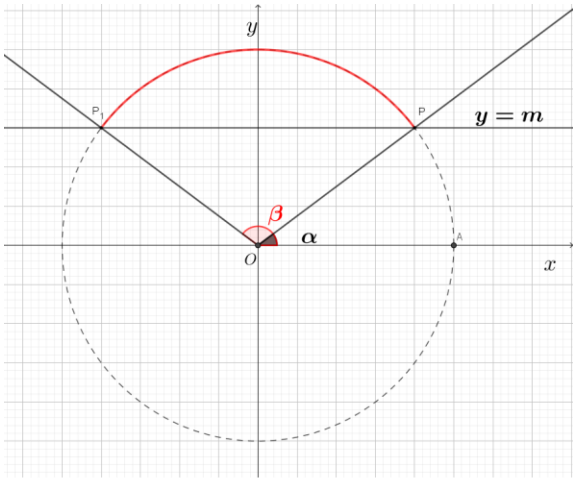
Equazioni esponenziali	
Equazioni esponenziali elementari $a^x = b$ con $a > 0$	Soluzioni • Se $b > 0$ $x = \log_a b$ • Se $b \leq 0$ eq. impossibile
Equazioni esponenziali con una sola base $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ con $a > 0$	Soluzioni $f(x) = g(x)$
Equazioni esponenziali riconducibili ad elementari $a^{2x} + a^x + b = 0$ $a^x + a^{-x} + b = 0$	Soluzioni • Porre $a^x = t$ • risolvere l'equazione di 2° grado in t • risolvere le equazioni elementari (o frazionarie) ottenute

Equazioni logaritmiche	
Equazioni logaritmiche elementari $\log_a x = b$ con $a > 0$	$x = a^b$
Equazioni logaritmiche riconducibili ad elementari $a\log_a{}^2 x + b\log_a x + c = 0$	Soluzioni Se $x > 0$ • Porre $a^x = t$ • risolvere l'equazione di 2° grado in t • risolvere le equazioni elementari ottenute
Equazioni logaritmiche contenenti logaritmi nella stessa base $\log_a f(x) = \log_a g(x)$	Soluzioni $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x)\end{cases}$
Equazioni logaritmiche contenenti somme algebriche di logaritmi anche in base diversa	Utilizzando le proprietà dei logaritmi, ricondursi a risolvere equazioni elementari

Disequazioni goniometriche

Disequazioni elementari in seno

$\operatorname{sen} x > m \qquad \operatorname{sen} x < m$



$\operatorname{sen} x > m$ (*linea rossa*)

Se $-1 < m < 1$: $\alpha + 2k\pi < x < \beta + 2k\pi$

Se $m = -1$: $x \neq \frac{3}{2}\pi$

Se $m \geq 1$: eq. Impossibile

$\operatorname{sen} x < m$ (*linea tratteggiata*)

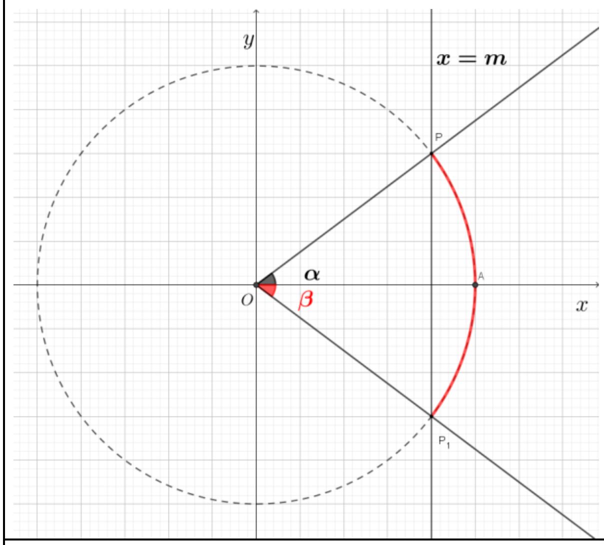
Se $-1 < m < 1$: $\beta + 2k\pi < x < \alpha + 2(k+1)\pi$

Se $m = 1$: $x \neq \frac{\pi}{2}$

Se $m \leq -1$: eq. Impossibile

Disequazione elementare in coseno

$\cos x > m \qquad \cos x < m$



$\cos x > m$ (*linea rossa*)

Se $-1 < m < 1$: $\beta + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$

Se $m = -1$: $x \neq \pi$

Se $m \geq 1$: eq. Impossibile

$\cos x < m$ (*linea tratteggiata*)

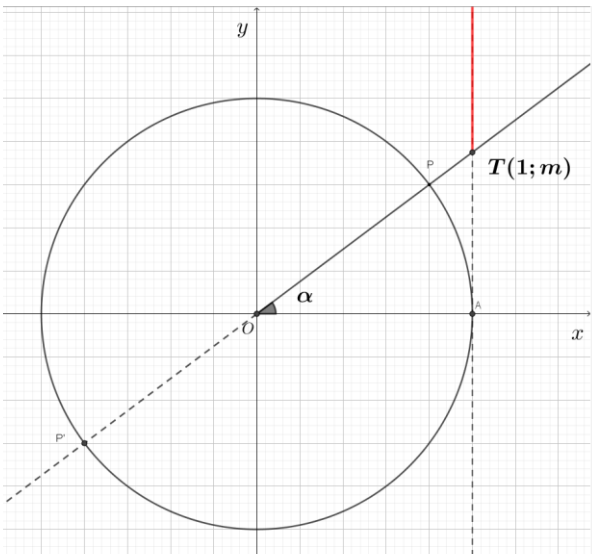
Se $-1 < m < 1$: $\alpha + 2k\pi < x < \beta + 2(k+1)\pi$

Se $m = 1$: $x \neq \frac{\pi}{2}$

Se $m \leq -1$: eq. Impossibile

Disequazione elementare in tangente

$\operatorname{tg} x > m \qquad \operatorname{tg} x < m$



$\operatorname{tg} x > m$ (*linea rossa*)

Se $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $\alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$: $\alpha + k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + k\pi$

$\operatorname{tg} x < m$ (*linea tratteggiata*)

Se $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$: $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi$

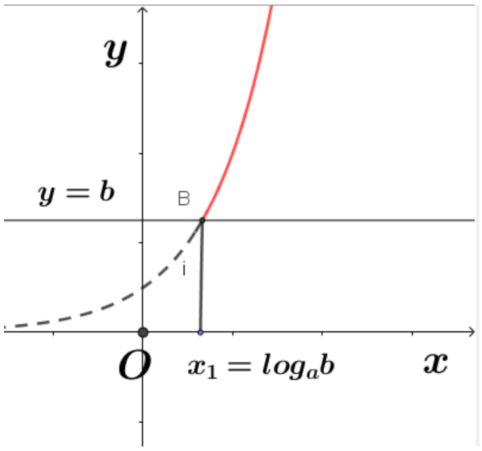
Se $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$: $\frac{3}{2}\pi + k\pi < x < \alpha + (k+1)\pi$

Disequazioni di 2° in un'unica funzione goniometrica $a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\, x + c > 0$ $a\cos^2 x + b\cos x + c > 0$ $a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\, x + c > 0$	• Porre $\mathrm{sen}\, x = t \quad [\cos x = t; \qquad \mathrm{tg}\, x = t]$ • risolvere la disequazione di 2° grado in t • risolvere le disequazioni elementari ottenute
Disequazioni lineari in seno e coseno $a\,\mathrm{sen}\, x + b\cos x + c > 0$	**Metodo grafico** Nel sistema $\begin{cases} a\,\mathrm{sen}\, x + b\cos x + c > 0 \\ \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$ posto $\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \mathrm{sen}\, x \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} aY + bX + c > 0 & \textit{semipiano} \\ X^2 + Y^2 = 1 & \textit{circ. goniometrica} \end{cases}$ le cui soluzioni sono archi di circonferenza goniometrica, da cui è possibile ricavare l'intervallo delle soluzioni
	Metodo dell'angolo aggiunto L'equazione data è equivalente alla equazione: $r\,\mathrm{sen}(x+\alpha) + c > 0$ con $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{b}{a} \end{cases}$
	Metodo della tangente Con la sostituzione: $\begin{cases} \mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ con $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$
Disequazioni omogenee di 2° grado $a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\, x\cos x + c\cos^2 x > 0$ con $a \neq 0$	$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\, x + c = 0 \end{cases}$
$b\,\mathrm{sen}\, x\cos x + c\cos^2 x > 0$	$\cos x\left(b\,\mathrm{sen}\, x + c\cos x\right) > 0$ che si studia con lo schema dei segni del prodotto
Disequazioni riconducibili ad equazioni omogenee di 2° grado $a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\, x\cos x + c\cos^2 x = d$	$a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\, x\cos x + c\cos^2 x > d\left(\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x\right)$ e si risolve la disequazione omogenea ottenuta

Disequazioni esponenziali

Disequazioni elementari con $a>0$

$a^x>b$ $\qquad$ $a^x<b$



$a^x>b$

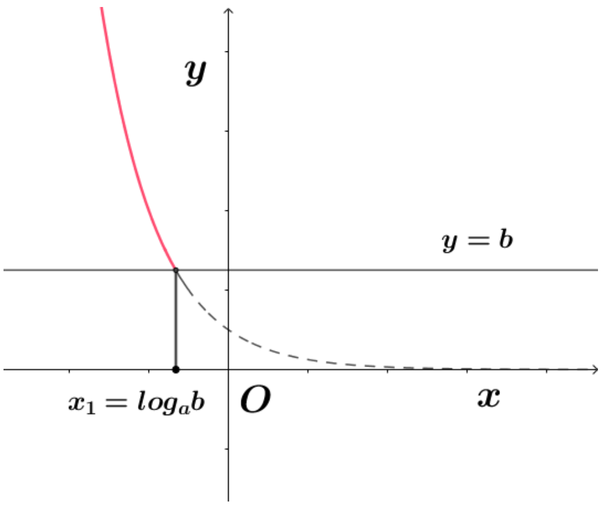
- $b>0 \quad \Rightarrow \quad x>\log_a b$
- $b\le 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$a^x<b$

- $b>0 \quad \Rightarrow \quad x<\log_a b$
- $b\le 0 \quad \Rightarrow \quad$ diseq. impossibile

Disequazioni elementari con $0<a<1$

$a^x>b$ $\qquad$ $a^x<b$



$a^x>b$

- $b>0 \quad \Rightarrow \quad x<\log_a b$
- $b\le 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$a^x<b$

- $b>0 \quad \Rightarrow \quad x>\log_a b$
- $b\le 0 \quad \Rightarrow \quad$ diseq. impossibile

Disequazioni con una sola base con $a>0$

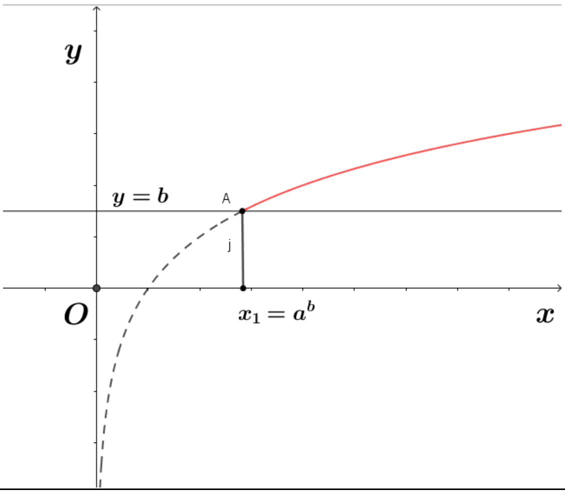
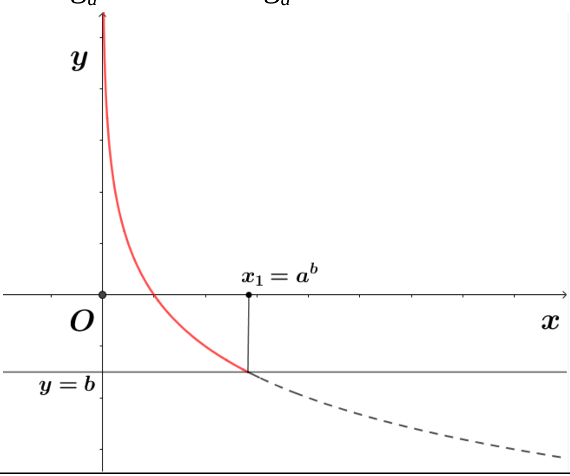
$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $\qquad$ $a^{f(x)}<a^{g(x)}$

$$a^{f(x)}>a^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)>g(x)$$
$$a^{f(x)}<a^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)<g(x)$$

Disequazioni con una sola base con $0<a<1$

$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $\qquad$ $a^{f(x)}<a^{g(x)}$

$$a^{f(x)}>a^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)<g(x)$$
$$a^{f(x)}<a^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)>g(x)$$

Disequazioni logaritmiche	
Disequazioni elementari con $a > 1$ $\log_a x > b \qquad \log_a x < b$ 	$\log_a x > b$ • $\forall b \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad x > a^b$
	$\log_a x < b$ • $\forall b \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < x < a^b$
Disequazioni elementari con $0 < a < 1$ $\log_a x > b \qquad \log_a x < b$ 	$\log_a x > b$ • $\forall b \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < x < a^b$
	$\log_a x < b$ • $\forall b \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad x > a^b$
Disequazioni contenenti logaritmi nella stessa base $\log_a f(x) > \log_a g(x)$	Se $a > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ Se $0 < a < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$
Disequazioni logaritmiche contenenti somme algebriche di logaritmi anche in base diversa	Utilizzando le proprietà dei logaritmi, ricondursi a risolvere disequazioni elementari