

Equazioni e disequazioni algebriche

Equazioni razionali	
Equazioni di 1° grado $ax = b$	<ul style="list-style-type: none"> • Se $a \neq 0$: $x = \frac{b}{a}$ • Se $(a = 0) \wedge (b \neq 0)$: eq. Impossibile • Se $(a = 0) \wedge (b = 0)$: eq. indeterminata
Equazioni di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$	Posto $\Delta = b^2 - 4ac$ <ul style="list-style-type: none"> • Se $\Delta > 0$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ • Se $\Delta = 0$: $x = -\frac{b}{2a}$ • Se $\Delta < 0$: eq. impossibile
Equazioni di 2° grado con $b = 2\beta$ $ax^2 + 2\beta x + c = 0$	Posto $\frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac$ <ul style="list-style-type: none"> • Se $\frac{\Delta}{4} > 0$: $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$ (formula ridotta) • Se $\frac{\Delta}{4} = 0$: $x = -\frac{\beta}{a}$ • Se $\frac{\Delta}{4} < 0$: eq. impossibile
Equazioni di 2° grado <u>pura</u> $ax^2 + c = 0$	<ul style="list-style-type: none"> • Se $\frac{c}{a} < 0$: $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ • Se $\frac{c}{a} = 0$: $x = 0$ • Se $\frac{c}{a} > 0$: eq. impossibile
Equazioni di 2° grado <u>spuria</u> $ax^2 + bx = 0$	L'equazione ha sempre 2 soluzioni $x = 0$ $x = -\frac{b}{a}$

Relazioni tra i coefficienti dei termini e le radici dell'equazione di 2° grado	
Somma delle radici (soluzioni) x_1 e x_2 dell'equazione di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
Prodotto delle radici (soluzioni) x_1 e x_2 dell'equazione di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
Realtà delle radici	<ul style="list-style-type: none"> • $\Delta > 0$ 2 radici reali e distinte • $\Delta = 0$ 1 radice reale (2 coincidenti) • $\Delta < 0$ nessuna radice reale (2 complesse)
Altre relazioni <ul style="list-style-type: none"> • $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = K \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = K \Rightarrow -\frac{b}{c} = K$ • $x_2 = -x_1$ (radici opposte) $\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow b = 0$ • $x_2 = \frac{1}{x_1}$ (radici reciproche) $\Rightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow c = a$ • $x_2 = -\frac{1}{x_1}$ (rad. antireciproche) $\Rightarrow x_1 x_2 = -1 \Rightarrow c = -a$ • $x_1^2 + x_2^2 = K \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = K \Rightarrow \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = K$ • $x_2 = Nx_1 \Rightarrow \begin{cases} x_1(N+1) = -\frac{b}{a} \\ Nx_1^2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ 	Sempre $\Delta > 0$
Regola di Cartesio	
<ul style="list-style-type: none"> • + + + $\Rightarrow x_1 < 0 \quad x_2 < 0$ • + + - $\Rightarrow x_1 < 0 \quad x_2 > 0 \quad x_1 > x_2$ • + - + $\Rightarrow x_1 > 0 \quad x_2 > 0$ • + - - $\Rightarrow x_1 > 0 \quad x_2 < 0 \quad x_1 < x_2$ 	

Disequazioni razionali	
Disequazioni di 1° grado $ax > b$ ($a \neq 0$)	Soluzioni <ul style="list-style-type: none"> • Se $a > 0$: $x > \frac{b}{a}$ • Se $a < 0$: $x < \frac{b}{a}$
Disequazioni di 2° grado $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) Posto $\Delta = b^2 - 4ac$	<ul style="list-style-type: none"> • Se $\Delta > 0$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <p>La disequazione è verificata per valori esterni all'intervallo delle radici:</p> $x < x_1 \quad \vee \quad x > x_2$
	<ul style="list-style-type: none"> • Se $\Delta = 0$: <p>La disequazione è verificata per</p> $x \neq -\frac{b}{2a}$
	<ul style="list-style-type: none"> • Se $\Delta < 0$: <p>La disequazione è sempre verificata $[\forall x \in \mathbb{R}]$</p>
Disequazioni di 2° grado $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) Posto $\Delta = b^2 - 4ac$	<ul style="list-style-type: none"> • Se $\Delta > 0$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <p>La disequazione è verificata per valori interni all'intervallo delle radici:</p> $x_1 < x < x_2$
	<ul style="list-style-type: none"> • Se $\Delta = 0$: <p>La disequazione non è mai verificata $[\neg \exists x \in \mathbb{R}]$</p>
	<ul style="list-style-type: none"> • Se $\Delta < 0$: <p>La disequazione non è mai verificata $[\neg \exists x \in \mathbb{R}]$</p>

Equazioni e disequazioni irrazionali	
Prima di elevare entrambi i membri di una equazione al quadrato è necessario porre le seguenti condizioni: <ul style="list-style-type: none"> • Esistenza del radicale • Concordanza del segno dei due membri 	
Equazione del tipo $\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{esistenza del radicale} \\ g(x) \geq 0 & \text{concordanza del segno} \\ f(x) = [g(x)]^2 & \text{elevamento al quadrato} \end{cases}$
Disequazioni del tipo $\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$	$\begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \end{cases}$
Disequazioni del tipo $\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$