Problema

Quanti sono i punti a coordinate intere interni ad una sfera di raggio 5 unità di misura?

Risoluzione 1 (*Risoluzione grafica*)

Nello spazio tridimensionale si consideri la sfera di raggio 5 unità e si immagini di sezionarla con piani paralleli al piano xy con quota (asse z) intera; si tratta dei piani di equazioni:

$z=0$ (α)

$z=1$ (β)

$z=-1$ (β_1)

$z=2$ (γ)

$z=-2$ (γ_1)

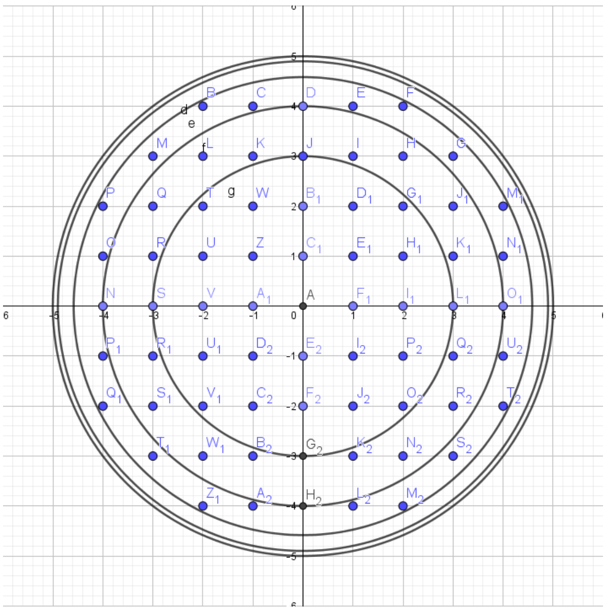
$z=3$ (δ)

$z=-3$ (δ_1)

$z=4$ (ε)

$z=-4$ (ε_1)

Si disegni una circonferenza di raggio 5 e si contino i punti interni ad essa. Si tratta dei punti interni al piano α: in totale 69 punti.



Le sezioni della sfera con i piani β e β_1 sono cerchi di raggi $r_1=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}$. Disegnando questi cerchi si osserva che contengono ancora 69 punti: in totale 138.

Le sezioni della sfera con i piani γ e γ_1 sono cerchi di raggi $r_2=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$. Disegnando questi cerchi si osserva che contengono ancora 69 punti: in totale 138.

Le sezioni della sfera con i piani δ e δ_1 sono cerchi di raggi $r_3=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$. Disegnando questi cerchi si osserva che contengono 45 punti: in totale 90.

Le sezioni della sfera con i piani ε e ε_1 sono cerchi di raggi $r_4=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$. Disegnando questi cerchi si osserva che contengono 25 punti: in totale 50.

Sommando tutti questi punti si ottiene:

$$N=69+138+138+90+50=485$$

Risoluzione 2 (*Risoluzione algebrica-analitica*)

Si tratta di calcolare il numero di terne (x, y, z) a coordinate intere per cui risulta:

$x^2+y^2+z^2<25$

Osserviamo innanzitutto che deve essere per forza $|x|<5$, $|y|<5$, $|z|<5$.

Con $z=0$ $\rightarrow$ $x^2+y^2<25$

$y=0$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9

$y=\pm1$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9x2=18

$y=\pm2$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9x2=18

$y=\pm3$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$ Totale: 7x2=14

$y=\pm4$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$ Totale: 5x2=10

Totale 69

Con $z=1$ $\rightarrow$ $x^2+y^2<24$

$y=0$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9

$y=\pm1$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9x2=18

$y=\pm2$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9x2=18

$y=\pm3$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$ Totale: 7x2=14

$y=\pm4$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$ Totale: 5x2=10

Totale 69

Con $z=-1$ $\rightarrow$ $x^2+y^2<24$

Totale 69

Con $z=2$ $\rightarrow$ $x^2+y^2<21$

$y=0$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9

$y=\pm1$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9x2=18

$y=\pm2$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$, $x=\pm4$ Totale: 9x2=18

$y=\pm3$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$ Totale: 7x2=14

$y=\pm4$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$ Totale: 5x2=10

Totale 69

Con $z=-2$ $\rightarrow$ $x^2+y^2<21$

Totale 69

Con $z=3$ $\rightarrow$ $x^2+y^2<16$

$y=0$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$ Totale: 7

$y=\pm1$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$ Totale: 7x2=14

$y=\pm2$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$, $x=\pm3$ Totale: 7x2=14

$y=\pm3$ si ha: $x=0$, $x=\pm1$, $x=\pm2$ Totale: 5x2=10

Totale 45

Con $z=-3$ $\rightarrow$ $x^2+y^2<16$

Totale 45

Con $z = 4$ $\rightarrow$ $x^2 + y^2 < 9$

$y = 0$ si ha: $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ Totale: 5

$y = \pm 1$ si ha: $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ Totale: 5x2=10

$y = \pm 2$ si ha: $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, Totale: 5x2=10

Totale 25

Con $z = -4$ $\rightarrow$ $x^2 + y^2 < 9$

Totale 25

E sommando tutti i totali si ottiene $N = 5 \times 69 + 2 \times 45 + 2 \times 25 = 485$.