Invarianza dell'Intervallo (Separazione spazio-temporale) per le trasformazioni di Lorentz

Considerati gli eventi A e B, essi sono individuati da due osservatori inerziali mediante le coordinate spazio-temporali seguenti:

Per l'osservatore 1: $A(x_A;t_A)$ $B(x_B;t_B)$ $\rightarrow$ $\Delta s = x_B - x_A$ $\Delta t = t_B - t_A$

Per l'osservatore 2: $A(x'_A;t'_A)$ $B(x'_B;t'_B)$ $\rightarrow$ $\Delta s' = x'_B - x'_A$ $\Delta t' = t'_B - t'_A$

Quindi, tenendo conto delle equazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{x v_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{o, che è lo stesso} \quad \begin{cases} \Delta s' = \dfrac{\Delta s - v_0 \Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}} \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v_0 \Delta s}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}} \end{cases}$$

risulta:

$$I'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta s'^2 = c^2 \left(\frac{\Delta t - \dfrac{v_0 \Delta s}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}} \right)^2 - \left(\frac{\Delta s - v_0 \Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}} \right)^2 =$$

$$= c^2 \frac{\Delta t^2 - \dfrac{2 v_0 \Delta s \Delta t}{c^2} + \dfrac{v_0^2 \Delta s^2}{c^4}}{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}} - \frac{\Delta s^2 - 2 v_0 \Delta s \Delta t + v_0^2 \Delta t^2}{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{c^2 \Delta t^2 - \cancel{2 v_0 \Delta s \Delta t} + \dfrac{v_0^2 \Delta s^2}{c^2} - \Delta s^2 + \cancel{2 v_0 \Delta s \Delta t} - v_0^2 \Delta t^2}{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{\left(c^2 - v_0^2\right) \Delta t^2 - \left(1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}\right) \Delta s^2}{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}} = \frac{\left(1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}\right) c^2 \Delta t^2 - \left(1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}\right) \Delta s^2}{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}} =$$

$$= c^2 \Delta t^2 - \Delta s^2 = I^2$$