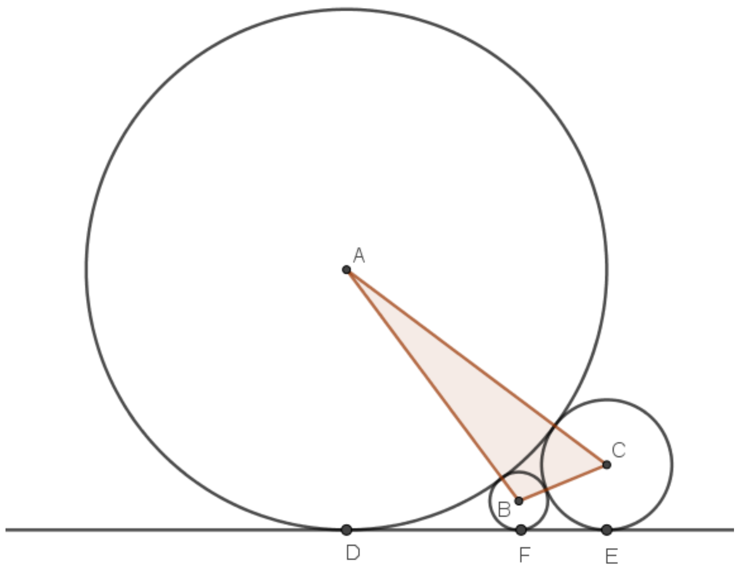
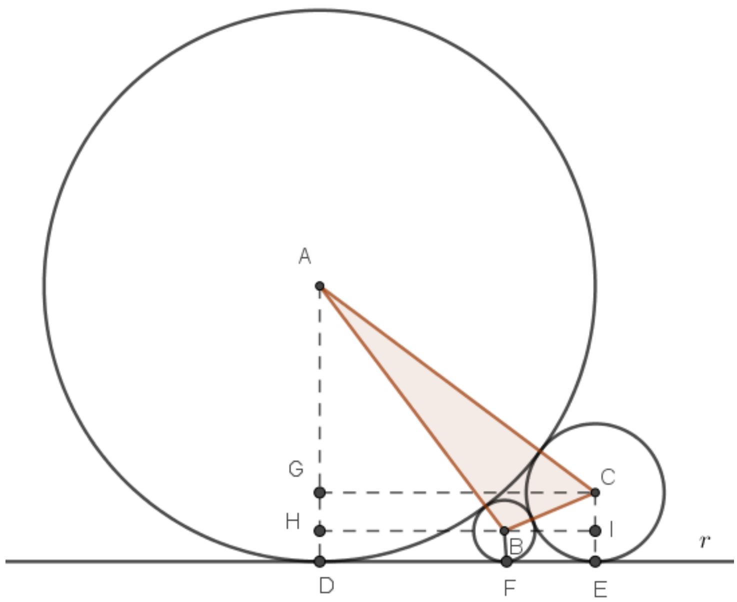
Due circonferenze, una di raggio 4 e l'altra di raggio 1 sono tangenti ad una stessa retta. Nello spazio compreso tra le due circonferenze e la retta è inscritta una terza circonferenza.
Calcolare l'area del triangolo ottenuto congiungendo i centri delle 3 circonferenze.



Risoluzione
Si traccino i segmenti AD, BF, CE. Inoltre si conducano i segmenti CG, BH e BI, tutti paralleli alla retta *r*.



Risulta:

$\overline{AG} = 4 - 1 = 3 \; AC = 4 + 1 = 5$ e quindi per il teorema di Pitagora si ha
$\overline{GC} = \overline{DE} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Inoltre, posto $BF = x$ si ottiene:

$$\overline{HB} = \overline{DF} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{(4+x)^2 - (4-x)^2} = 4\sqrt{x}$$

$$\overline{BI} = \overline{FE} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CI}^2} = \sqrt{(1+x)^2 - (1-x)^2} = 2\sqrt{x}$$

Pertanto è possibile impostare l'equazione $\overline{DE} = \overline{DF} + \overline{FE}$ ottenendo:

$$4 = 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad 3\sqrt{x} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{4}{9}$$

Infine: $\overline{DF} = \frac{8}{3}$ e $\overline{FE} = \frac{4}{3}$

L'area del triangolo colorato si può ora calcolare in una dei seguenti modi:

1. Con la formula di Erone

$$2p = AB + BC + CA = 4 + \frac{4}{9} + 1 + \frac{4}{9} + 4 + 1 = 10 + \frac{8}{9}$$

$$p = 5 + \frac{4}{9}$$

$$A = \sqrt{p\left(p - \overline{AB}\right)\left(p - \overline{BC}\right)\left(p - \overline{CA}\right)}$$

$$A = \sqrt{\left(5 + \frac{4}{9}\right)\left(5 + \frac{4}{9} - 4 - \frac{4}{9}\right)\left(5 + \frac{4}{9} - 1 - \frac{4}{9}\right)\left(5 + \frac{4}{9} - 4 - 1\right)}$$

$$A = \sqrt{\left(5 + \frac{4}{9}\right)(1)(4)\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9} \cdot \frac{16}{9}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{9}$$

$$A_{(ABC)} = \frac{28}{9}$$

2. Per differenza tra superfici:

$$A_{(ADEC)} = \frac{1}{2}\left(\overline{AD} + \overline{EC}\right) \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2}(4+1) \cdot 4 = 10$$

$$A_{(ADFB)} = \frac{1}{2}\left(\overline{AD} + \overline{BF}\right) \cdot \overline{DF} = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{9}\right) \cdot \frac{8}{3} = \frac{120}{27} = \frac{160}{9}$$

$$A_{(ADEC)} = \frac{1}{2}\left(\overline{BF} + \overline{EC}\right) \cdot \overline{FE} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} + 1\right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{26}{27}$$

$$A_{(ABC)} = 10 - \frac{40}{9} - \frac{26}{27} = \frac{270 - 160 - 26}{27} = \frac{84}{27} = \frac{28}{9}$$